



CENTRO ASOCIADO UNED DE CIUDAD REAL
SEDE DE VALDEPEÑAS

INGENIERÍA INDUSTRIAL
PRACTICAS DE MECÁNICA

Práctica 1.

DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA EN SÓLIDOS DE ESPESOR CONSTANTE.

Objetivos de la práctica

- Determinar la constante angular de recuperación de un muelle espiral.
- Calcular experimentalmente el momento de inercia de un disco, una esfera maciza, un cilindro macizo, un cilindro hueco y una barra. Comprobar los resultados con los resultantes de aplicar las expresiones teóricas de los momentos de inercia.
- Determinar el momento de inercia de una barra en función de la distancia del eje de rotación al centro de gravedad.
- Determinar los momentos de inercia de una barra a la que se le añadirán dos masas a diferentes distancias del eje de rotación que pasa por su centro de gravedad.
- Expresar y comentar para todos los resultados obtenidos las posibles causas de error.

Introducción teórica

1.- Determinación de la constante angular de recuperación del muelle espiral

La relación entre el impulso angular L de un sólido rígido en un sistema de coordenadas estacionario con origen en el centro de gravedad, y el momento Γ de la fuerza que se le aplica es:

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

En general, el momento angular L se expresa en función de la velocidad angular y de un tensor de inercia I , como:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

En el caso particular de que el eje de giro coincida con el eje Z , el momento angular L tendrá una única componente que puede expresarse como:

$$L_z = I_z \cdot \vec{\omega} = I_z \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

donde φ es el ángulo girado y I_z es el momento de inercia respecto al eje Z .

Por tanto,

$$\Gamma = I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (1)$$

El momento Γ también puede definirse como la fuerza que es necesario aplicar a un cuerpo, a una distancia d de su eje de giro, para compensar el giro:

Si el cuerpo se encuentra sujeto a un muelle en espiral, el momento de la fuerza puede relacionarse con la constante de recuperación angular del muelle en espiral K y el ángulo girado φ :

$$\Gamma = F \cdot d \quad (2) \qquad \Gamma = -K \cdot \varphi \quad (3)$$

donde el signo menos significa que el momento es contrario al causado por la fuerza que provoca la deformación del muelle. Si se igualan las expresiones (2) y (3), se puede deducir una expresión para calcular la constante de recuperación del muelle torsional K :

$$K = \frac{-F \cdot d}{\varphi} \quad (4)$$

2- Determinación del momento de inercia de un sólido experimentalmente

Si se igualan las expresiones (1) y (3), da la siguiente ecuación del movimiento:

$$I_z \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -K \cdot \varphi$$

La solución de esta ecuación diferencial será del tipo:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t) = \varphi_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{K}{I_z}} \cdot t\right)$$

Ecuación que representa un movimiento periódico con pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I_z}}$$

La pulsación (velocidad angular) ω se puede expresar en función de la frecuencia f o del período T , como:

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

por tanto, el período puede expresarse en función del momento de inercia y de la constante de recuperación angular del muelle espiral.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_z}{K}} \quad (5)$$

Luego el momento de inercia se puede expresar como:

$$I_z = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot K \quad (6)$$

De todo lo expuesto se deduce que, conocidos la constante de recuperación angular del muelle en espiral y el período, se puede calcular el momento de inercia de diversos sólidos rígidos.

3.- Determinación del momento de inercia de un sólido respecto de un eje que no pase por su centro de gravedad.

Hasta ahora la teoría se ha desarrollado suponiendo que el origen de coordenadas se encuentra en el centro de gravedad del cuerpo. Esto es cómodo en el caso en el que el torque esté aplicado en dicho punto. En el caso en el que el muelle torsional estuviera aplicado en un punto desplazado una distancia a del centro de gravedad, es necesario definir el momento angular a partir de un nuevo momento de inercia, aplicando el teorema de Steiner:

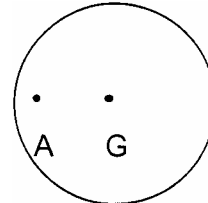
El momento de inercia respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por su centro de masas, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

Por tanto:

$$I_A = I_G + m(\overline{AG})^2$$

Y la ecuación (5) quedará

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_z + m(\overline{AG})^2}{K}} \quad (7)$$



Desarrollo experimental.

1. Cálculo de la constante de recuperación del muelle espiral

Se monta la barra en el equipo de torsión en espiral situándola en su centro y colocando las masas móviles simétricamente al eje de rotación. Con el dinamómetro situado en uno de los extremos cuya distancia se medirá (*d*) y formando ángulo recto con la barra, se hace girar la barra distintos ángulos (entre seis y ocho valores tomados desde $\pi/2$ hasta 4π radianes) y se anotan las parejas de valores ángulo-fuerza.

Ángulo φ (rad)	Fuerza <i>F</i> (N)	Momento <i>F</i> · <i>d</i> (N·m)

Dibujar en una gráfica el momento angular (eje *y*) frente al ángulo (eje *x*) y ajustar por el método de mínimos cuadrados para obtener la ordenada en el origen y la pendiente con sus respectivas desviaciones estándar. La constante angular de recuperación del muelle coincidirá con la pendiente y el error de la misma con su desviación estándar.

2. Cálculo de los momentos de inercia de distintos sólidos.

Para calcular el periodo de oscilación de distintos cuerpos se pegará a cada uno un trozo de papel que se pueda interponer entre las fotocélulas del contador digital. El contador se situará en la posición de medida de periodos –tres pasos por la barrera fotoeléctrica- si el tiempo medido no sobrepasa los 9,99s o en la posición de semiperiodos –dos pasos- si lo sobrepasa. Se une el sólido en estudio al rotor de torsión y se hace girar un determinado ángulo (algo menos de 180°). Se suelta el sólido se le deja oscilar libremente. Se deja que pase varias veces por el contador, y se pone a cero el contador. Se anota el periodo de oscilación en estas condiciones. Se repite la medida 5 veces para obtener media y desviación estándar.

Se tomarán las dimensiones de cada uno de los objetos y su peso.

Se calculará el momento de inercia experimental aplicando la ecuación (6) y se comparará con el momento de inercia teórico:

$$I_z(\text{esfera}) = \frac{2}{5} m r^2$$

$$I_z(\text{círculo, cilindro macizo}) = \frac{m}{2} r^2$$

$$I_z(\text{cilindro hueco}) = \frac{1}{2} m (r_{\text{interno}}^2 + r_{\text{externo}}^2)$$

$$I_z(\text{varilla}) = \frac{m}{12} l^2$$

3. Cálculo del momento de inercia de una barra respecto de un eje que no pasa por su centro de gravedad.

Del mismo modo que en el apartado anterior se calculará los momentos de inercia experimentales de la barra cuando se sitúa en un extremo ($d=0$) y a una cuarta parte de su longitud total. Se comparará el resultado con el obtenido mediante la ecuación de Steiner (ecuación 7).

	T (s)	I_z exp. (kg·m ²)	Masa cuerpo (m)	Radio cuerpo	I_z teórico (kg·m ²)	Error absoluto	Error relativo
Disco							
Esfera							
Cilindro macizo							
Cilindro hueco							
Barra							
Barra (eje de giro $d=0$)							
Barra (eje de giro $d=L/4$)							

4. Variación del momento de inercia de una barra en función de la distancia entre las masas.

Si suponemos que el sistema masa-barra-masa se puede modelar como dos masas puntuales situadas a una distancia a del centro de gravedad, es posible obtener la masa a partir de la ecuación correspondiente.

Se situaran las masas de la barra a distintas distancias entre si (5, 10, 20, 35, 50 cm) y se calculará su momento de inercia. Para una masa puntual m a una distancia a del eje de rotación se cumple:

$$I_z = m a^2$$

$$I_z(\text{sistema}) = m_1 a^2 + m_2 a^2 + \frac{m_b}{12} l^2 = (m_1 + m_2) \cdot a^2 + I_b$$

Dibujar una gráfica del momento de inercia experimental I_z (eje Y) frente a la distancia entre las dos masas al cuadrado (eje X) para comprobar su linealidad. La ordenada en el origen nos dará el valor del momento de inercia de la barra I_b y la pendiente el valor de (m_1+m_2)

Despejando en cada caso, compare el valor obtenido con el valor de las masas $[(m_1+m_2)$ y $m_b]$ medido por pesada, comparando los errores de cada resultado.

Práctica 2.

DINÁMICA DE SISTEMAS: MÁQUINA DE ATWOOD.

Objetivo de la práctica

El objeto de la experiencia es servirnos de la máquina de Atwood para determinar el valor de la aceleración gravitatoria.

1. Introducción teórica

Supongamos dos masas m_1 y m_2 en los extremos de un hilo ideal que se apoya sin deslizar, sobre una polea de eje horizontal, también ideal, es decir, sin rozamiento en el eje. El momento de inercia de la polea respecto de su eje es I .

El conjunto se esquematiza en la figura 1, donde R es el radio de la polea.

Si las tensiones en los ramales derecho e izquierdo son, respectivamente, T_1 y T_2 , las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2 a \\ -m_1 g + T_1 &= m_1 a \end{aligned} \quad (1)$$

$$(T_2 - T_1) R = I \frac{d\omega}{dt}$$

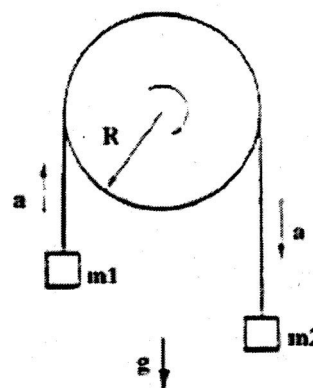


Figura 1

siendo $d\omega/dt$ la aceleración angular, relacionada con la lineal del hilo mediante la siguiente expresión :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{R} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y de la expresión (2), se obtienen:

$$g = \frac{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_2 - m_1} \cdot a \quad (3)$$

A la relación I/R^2 se le denomina masa equivalente de la pulea y representa la masa que habría que situar sobre una circunferencia de radio R para obtener el mismo momento de inercia que la pulea.

De hecho la situación de pulea ideal no se representa y siempre existe rozamiento que interviene en las medidas. Suponiendo el par de frenado debido al rozamiento (T_r) de valor constante mientras existe movimiento, las ecuaciones (1) quedan:

$$\begin{aligned}
 m_2 g - T_2 &= m_2 a \\
 -m_1 g + T_1 &= m_1 a \quad (4) \\
 (T_2 - T_1) R - \Gamma_r &= I \frac{d\omega}{dt}
 \end{aligned}$$

resultando:

$$g = \frac{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}{m_2 - m_1} \cdot a + \frac{\Gamma_r}{(m_2 - m_1) \cdot R} \quad (5)$$

Si se admite $\Gamma_r = \text{constante}$, el hilo se mueve con movimiento uniformemente acelerado.

2. Descripción del aparato utilizado

Supuesto el aparato perfectamente nivelado, se coloca la horquilla sustentadora en posición horizontal. Las masas m_1 y m_2 se colocan de forma que una de ellas, m_2 (la de mayor peso) queda apoyada en el soporte derecho mientras que la otra pesa, m_1 , cuelga por el lado izquierdo.

Puesto que se trabaja con masas cilíndricas exactamente iguales se provoca el desequilibrio colocando sobre m_2 una pequeña masa adicional (m').

Si tiramos del hilo que mantiene la base horizontal sobre la cual se apoya la masa m_2 , quedará libre y comienza a descender con un movimiento que regulan las ecuaciones del apartado 1, hasta llegar al tope de la barra que estará situado cerca del nivel del suelo.

3. Instrucciones.

Medimos lo más exáctamente posible la distancia entre las dos plataformas del aparato con un metro.

Pesamos las dos masas móviles y las pesas adicionales.

Añadimos todas las pesas suministradas ($10+5+2+2+1=20$ g) a la masa descendente y la situamos en la plataforma. Medimos cinco veces el tiempo que tarda en descender la masa desde la plataforma hasta el tope situado cerca del suelo.

Repetimos las medidas repartiendo las masas entre la pesa ascendente y la descendente (con objeto de que m_1+m_2 sea constante) de la siguiente manera: $2/18$, $4/16$, $5/15$, $6/14$, $7/13$, $8/12$ y $9/11$ g. Esto completa las medidas de tiempo necesarias para el experimento.

El momento de inercia de la polea se puede calcular con una buena aproximación mediante la fórmula:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

donde m es la masa de la polea: $472,5$ g y R su radio externo, que habrá que medir con una regla apropiada.

4. Cálculos y resultados.

La aceleración de cada experimento es fácil de calcular a partir de la separación entre las plataformas (d) y del tiempo medio medido (t) aplicando la ecuación:

$$a = 2 \frac{d}{t^2} \quad (6)$$

Despejando de la ecuación (5) se obtiene la relación funcional entre la aceleración del sistema en cada experimento con las constantes del sistema y con la diferencia de masas de los dos soportes (descendente, m_2 , menos ascendente, m_1).

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g - \frac{\Gamma_r}{R}}{(m_2 + m_1 + \frac{I}{R^2})}$$

$$a = \frac{g}{(m_2 + m_1 + \frac{I}{R^2})}(m_2 - m_1) - \frac{\frac{\Gamma_r}{R}}{(m_2 + m_1 + \frac{I}{R^2})}$$

Representar la aceleración obtenida según la ecuación 6 en el eje Y frente a la diferencia de masas ($m_2 - m_1$) en el eje X. Ajustar por mínimos cuadrados y obtener el coeficiente de regresión, la pendiente y la ordenada en el origen con sus respectivos errores.

A partir de la pendiente de la recta despejar la aceleración de la gravedad y de la ordenada en el valor del par de frenado debido al rozamiento de la polea.

Práctica 3.**VIBRACIONES LIBRES CON UN GRADO DE LIBERTAD.****Objetivo de la práctica**

- Determinación de la constante elástica k de los resortes
- Determinación del periodo del movimiento y su dependencia con la masa del móvil.

1. Introducción teórica

Corresponde este caso al supuesto de separar una masa m de su posición de equilibrio y comunicarle una velocidad inicial, dejándola después en libertad, suponiendo además que el amortiguamiento es nulo (fig. 1).

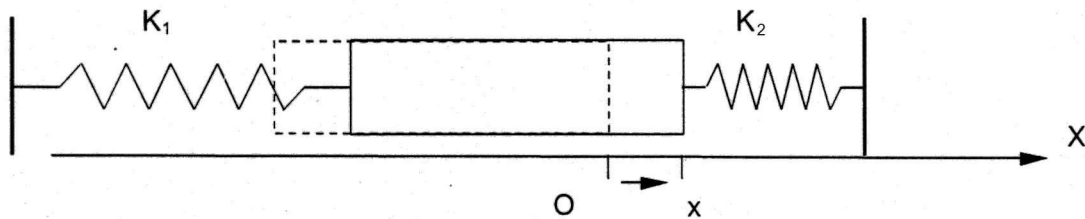


Figura 1

En el caso de que $k_1 = k_2$ la ecuación del movimiento toma la forma:

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad (1)$$

siendo $k = 2k_1$

Dividiendo esta expresión por la masa m tenemos que:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 \cdot x = 0 \quad (2)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

es la frecuencia angular natural de oscilación del sistema.

La ecuación (2) determina el movimiento vibratorio de la masa m y sus variables son el desplazamiento x y el tiempo t . Su solución es del tipo:

$$x = A \cdot \cos(\omega_n t + \phi) \quad (3)$$

Donde A y ϕ son constantes a determinar conocidas las condiciones iniciales de contorno.

Este tipo de solución nos dice que el movimiento es armónico y en la hipótesis establecida de ausencia de amortiguamiento éste continúa indefinidamente.

El período de este movimiento es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4)$$

La rigidez o constante elástica del resorte k se determina midiendo los desplazamientos de dicho resorte a fuerzas de distinta intensidad:

$$F = k x \quad (5)$$

2. Descripción del aparato utilizado

Para simular un movimiento carente de rozamiento en sistemas con un grado de libertad se utiliza un carril de aire. Este consiste en un perfil rectangular con uno de sus extremos abiertos por donde se insuflará aire a presión determinada que escapará por unos orificios regularmente distribuidos en la cara de contacto con el deslizador. El aire formará una película entre el carril y un deslizador anulando casi por completo el rozamiento entre éstos durante el movimiento del deslizador a lo largo del carril.

Antes de cada experiencia debe comprobarse la horizontalidad del carril y regularla por medio de un tornillo nivelador situado bajo su base.

3. Descripción de la práctica a realizar

La práctica se compone de dos partes.

3.1. Obtención de las constantes elásticas de los resortes estáticamente

En la primera se debe determinar la constante recuperadora de dos muelles, de constantes k_1 y k_2 respectivamente, mediante un procedimiento estático.

Este procedimiento consiste en representar gráficamente el alargamiento que presenta el resorte en cuestión frente a una fuerza aplicada.

Esto se llevará a cabo suspendiendo el muelle de un punto fijo y colocando distintas pesas en un platillo sujeto al otro extremo del muelle. Mediante una escala graduada se determinarán las distintas posiciones que toma el platillo en función de su alargamiento. La gráfica obtenida colocando la fuerza en ordenadas y el alargamiento en abscisas será una recta cuya pendiente coincidirá con la constante k del muelle. Si los puntos no se encuentran alineados se tomará la recta que más se ajuste a la nube de puntos obtenida experimentalmente. Este ajuste se hará mediante el Método de Mínimos Cuadrados.

3.2. Cálculo del periodo T del movimiento

La segunda parte de la práctica consiste en obtener prácticamente la frecuencia natural de oscilación del deslizador de masa m y los resortes. Para ello se pesará previamente el deslizador y las pesas de 50 y 100 g en una balanza con al menos 2 decimales. Se colocará sobre el carril de aire el deslizador sujeto en sus extremos a los muelles. Los extremos libres de los muelles se fijarán a posiciones fijas del carril (será necesario utilizar un soporte auxiliar para acortar la distancia del carril). Se pondrá en funcionamiento la bomba de aire del carril y separando el deslizador de su posición de equilibrio éste se moverá. La ecuación que determina este movimiento es:

$$m \cdot \ddot{x} + (k_1 + k_2) \cdot x = 0 \quad (7)$$

que define, como vimos anteriormente, un movimiento armónico cuyo período es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}} \quad (8)$$

donde m es la masa del deslizador.

Midiendo el período de oscilación con un cronómetro podemos obtener la frecuencia natural experimentalmente.

Repita estas medidas colocando encima del móvil pesas de 50, 100 y 150 g.

4. Cálculos y resultados obtenidos

4.1. Obtención de las constantes elásticas de los dos resortes estáticamente

Coloque el portamasas en la parte inferior del muelle y añada una masa suficiente para que el muelle quede tenso (en general 10 g serán suficientes). Pese el platillo junto con esta masa y considere esta masa como m_0 . Anote la posición de equilibrio sobre la regla y considere esta posición como y_0 . Tome como referencia el punto inferior del portamasas.

Se agregan sucesivamente pesas cada vez mayores (al menos 10 distintas, por ej. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 100, 120g sin olvidarse de pesar todas ellas en una balanza), midiéndose y anotándose los alargamientos o aumentos de longitud correspondientes a cada sobrecarga

Se representa la fuerza F (eje y) frente a la deformación $x=y-y_0$ (eje x) y mediante el método de Mínimos Cuadrados se ajustan los puntos a una recta de ecuación $y = mx + b$ y se hallan la ordenada en el origen y la pendiente, sus desviaciones típicas correspondientes y el coeficiente de regresión. Esto equivale a representar la ecuación 5 y, por tanto, la constante k se corresponde con la pendiente de la recta y su error con la desviación estándar de la misma.

El alumno deberá incluir, en una misma gráfica, las representaciones gráficas para la determinación de la constante de rigidez de cada muelle, indicando en la misma los valores obtenidos con su unidad correspondiente.

Tabla 1. Constante de recuperación del muelle 1.

Sobrepeso m (kg)	Deformación x (m)	Fuerza: $m \cdot g$ (N)

Tabla 2. Constante de recuperación del muelle 2.

Sobrepeso m (kg)	Deformación x (m)	Fuerza: $m \cdot g$ (N)

4.2. Cálculo del periodo T del movimiento

Se colocarán en el carril un deslizador previamente pesado en una balanza y dos muelles sujetos a posiciones fijas del carril (utilizar un soporte fijo auxiliar para acortar la distancia del carril); posteriormente se pondrá en funcionamiento la bomba de aire y separando el deslizador de su posición de equilibrio una distancia pequeña (aprox. 3 cm) éste se moverá. Midiendo el período de oscilación (hacer la medida para 10 oscilaciones) estamos en condiciones de calcular la frecuencia natural de oscilación del sistema. Repetir la medida al menos 5 veces

Repita estas medidas colocando encima del móvil pesas de 50, 100 y 150 g.

1. Para cada uno de los pesos del deslizador se calcula el T teóricamente mediante la expresión (8) y comparándolo con los obtenidos experimentalmente se calculan los errores y los valores medios y desviaciones típicas.

Periodo del movimiento

T experimental (s)	T teórico (s)	Error absoluto (s)	Error relativo (%)
<i>media±desv. están.</i>		<i>media±desv. están.</i>	<i>media±desv. están.</i>

2. Represente el periodo experimental frente a la raíz de la masa del deslizador. Esto equivale a representar la ecuación 8. ¿Se corrobora dicha ecuación? ¿Por qué? Obtenga la ecuación de la recta, el coeficiente de regresión y los errores de la pendiente y la ordenada en el origen. Del valor de la pendiente despeje el valor de k y compárelo con el obtenido mediante el método estático. Halle las diferencias en valor absoluto y relativo.

Práctica 4.

VIBRACIONES LIBRES 2 GRADOS.

Objetivo de la práctica

- Determinación de la constante elástica k de los resortes
- Determinación del periodo del movimiento para cada uno de los dos modos de vibración.

1. Introducción teórica

El sistema más general de vibraciones libres sin amortiguamiento con dos grado de libertad es el esquematizado en la figura 1, consistente en dos masas m_1 y m_2 sujetas a dos puntos fijos mediante dos resortes de constantes elásticas k_1 , y k_2 respectivamente y unidas entre sí por un resorte acoplado k_3 .

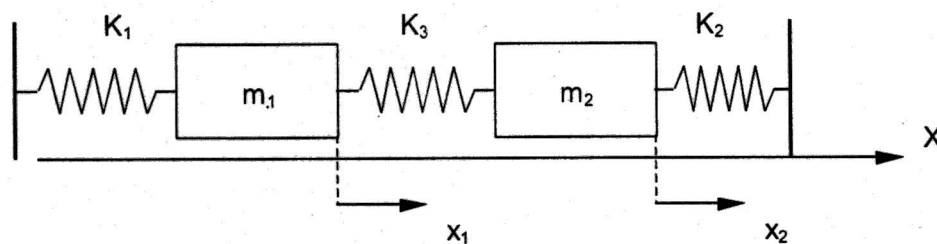


Figura 1

Cada una de las masas está sometida a dos fuerzas diferentes, que son la fuerza principal de su resorte y la debida al resorte acoplado. La fuerza principal en m_1 vendrá dada por $-k_1 \cdot x_1$ en la dirección de x_1 , y la del resorte acoplado será $-k_3 \cdot (x_1 - x_2)$ en la misma dirección. Con esto podemos escribir la ecuación del movimiento para la masa m_1 de la forma:

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -k_1 \cdot x_1 - k_3 \cdot (x_1 - x_2) \quad (1)$$

Análogamente para m_2 podemos escribir:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k_2 \cdot x_2 - k_3 \cdot (x_2 - x_1) \quad (2)$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales que definen el sistema completo ordenando (1) y (2) son:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (k_1 + k_3) \cdot x_1 - k_3 \cdot x_2 \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3) \cdot x_2 - k_3 \cdot x_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Para resolver este sistema vamos a admitir que las dos masas se mueven con la misma frecuencia pero con distinta amplitud, es decir, probaremos soluciones del tipo:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \alpha) \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}\quad (4)$$

Sustituyendo en (3) obtendremos:

$$\begin{aligned}-m_1 \omega^2 A_1 \cos(\omega t + \alpha) + (k_1 + k_3) A_1 \cos(\omega t + \alpha) - k_3 A_2 \cos(\omega t + \alpha) &= 0 \\-m_2 \omega^2 A_2 \cos(\omega t + \alpha) + (k_2 + k_3) A_2 \cos(\omega t + \alpha) - k_3 A_1 \cos(\omega t + \alpha) &= 0\end{aligned}$$

Simplificando $\cos(\omega t + \alpha)$, ya que la solución debe ser válida para todo t y ordenando llegamos a que:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_3 - m_1 \omega^2) A_1 - k_3 A_2 &= 0 \\-k_3 A_1 + (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) A_2 &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Sistema homogéneo con dos incógnitas, A_1 y A_2 que sólo tendrá solución si el determinante de los coeficientes es nulo.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} k_1 + k_3 - m_1 \omega^2 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \\(k_1 + k_3 - m_1 \omega^2)(k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) - k_3^2 = 0\end{aligned}\quad (6)$$

Ecuación bicuadrada que en el caso de una cadena simétrica $k_1 = k_2 = k$; $k_3 = k'$; $m_1 = m_2 = m$ se convertiría en:

$$m^2 \omega^4 - 2(k + k') m \omega^2 + ((k + k')^2 - k'^2) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{m}}$$

Estas frecuencias son las dos frecuencias naturales del sistema que sustituidas en cualquiera de las ecuaciones de (5) nos permitirían calcular los valores de A_1 y A_2 . En el caso de que ambas masas vibren con la frecuencia ω_1 tendremos dos movimientos en fase $A_1 = A_2$ y en el caso de que vibren con ω_2 las masas se encontrarán en oposición de fase $A_1 = -A_2$. Tenemos, entonces, dos soluciones linealmente independientes para el sistema:

$$\begin{aligned}x_1^1 &= A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) & x_1^2 &= B \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\x_2^1 &= A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) & x_2^2 &= -B \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\end{aligned}$$

Por tanto las soluciones generales del sistema para cada modo de vibración serán la suma de las dos soluciones:

$$\begin{aligned}x_1 &= A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \\x_2 &= A \cos(\omega_1 t + \alpha_1) - B \cos(\omega_2 t + \alpha_2)\end{aligned}\quad (7)$$

Donde A , B , α_1 , α_2 son constantes a determinar por las condiciones iniciales de contorno.

2. Descripción del aparato utilizado

El aparato necesario para la realización de esta práctica es el mismo que el descrito en la práctica 4, es decir, el carril de aire. Se necesitarán dos deslizadores de masas iguales y tres resortes, dos de los cuales tendrán constantes elásticas iguales y un tercero constante elástica distinta.

3.- Descripción de la práctica a realizar

La realización de esta práctica se compone de dos partes.

3.1. Determinación de las constantes k y k' .

El primer lugar se determinarán las constantes elásticas de los resortes k y k' por el procedimiento estático descrito en la práctica de un grado de libertad.

3.2. Determinación de las frecuencias para cada modo de vibración

A continuación se calcularán las dos frecuencias naturales de oscilación del sistema, para lo cual colocaremos, como indica la figura 1, las dos masas y los resortes sobre el carril de aire, poniendo en funcionamiento la bomba para evitar el rozamiento (será necesario hacer uso del soporte auxiliar para acortar la distancia del carril).

Para provocar que el sistema oscile según la primera frecuencia natural $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ basta separar las masas la misma distancia en el mismo sentido de su posición de equilibrio, ya que si tomamos $x_1(0) = x_2(0)$ la expresión (7) se nos convierte en:

$$A \cos \alpha_1 + B \cos \alpha_2 = A \cos \alpha_1 - B \cos \alpha_2 \quad (8)$$

Igualando los coeficientes de los cosenos: $A = A$ y $B = -B$, por tanto $B = 0$, por lo que se anulan los términos en ω_2 .

Del mismo modo, para provocar que el sistema oscile según la segunda frecuencia de oscilación $\omega_2 = \sqrt{(k+2k')/m}$ basta separar las dos masas la misma distancia de su posición de equilibrio, pero en sentidos opuestos, de este modo $A = -A$ y por tanto $A = 0$ y se anularán los términos en ω_1 .

En cualquiera de los dos casos se utilizará un cronómetro para medir el periodo de oscilación.

4.- Cálculos y resultados obtenidos

4.1. Determinación de las constantes k y k' .

Se procederá como en la práctica de oscilaciones de un grado de libertad (apartado 5.1) en el cálculo estático para determinar las constantes k y k' . A partir de estos valores se calculan las frecuencias naturales de vibración ω_1 y ω_2 aplicando las ecuaciones del apartado anterior.

4.2. Determinación de las frecuencias para cada modo de vibración.

Con el sistema tal y como se indicó en el apartado 3 se realizarán cinco mediciones con el cronómetro para cada frecuencia y se tomará como valor correcto del periodo de oscilación la

media aritmética de las cinco y como estimación de su error la desviación estándar. Con los valores de los periodos calcularemos las frecuencia $\omega_1 = 1/T_1$ y $\omega_2 = 1/T_2$.

Periodo del movimiento 1

ω_1 experimental (s)	ω_1 teórico (s)	Error absoluto (s)	Error relativo (%)
<i>media±desv. están.</i>		<i>media±desv. están.</i>	<i>media±desv. están.</i>

Periodo del movimiento 2

ω_2 experimental (s)	ω_2 teórico (s)	Error absoluto (s)	Error relativo (%)
<i>media±desv. están.</i>		<i>media±desv. están.</i>	<i>media±desv. están.</i>

Práctica 5.

DINÁMICA DEL SÓLIDO CON UN PUNTO FIJO: MOVIMIENTO GIROSCÓPICO.

Objetivo de la práctica

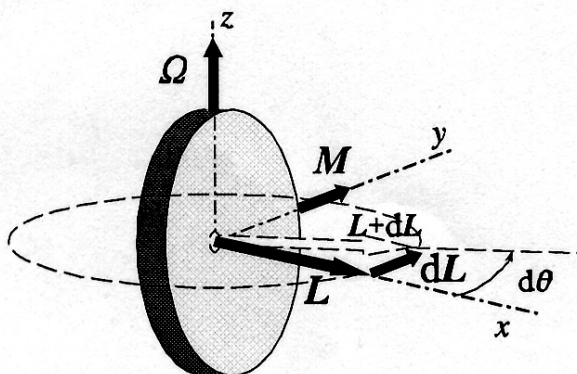
Se trata de estudiar el movimiento de un sólido rígido con un punto fijo, sometido a la acción de la gravedad y en el supuesto de que su centro de masas no coincide con el punto fijo.

Descripción del aparato utilizado

El giróscopo tiene forma de aro de bicicleta, es liviano, pero posee un gran momento de inercia debido al cubo metálico de forma de canasto con cojinetes de esferas que lleva fijo. De esta forma se consigue el acceso al centro de gravedad, de modo que el giróscopo puede suspenderse por encima, por debajo y en dicho centro.

Introducción teórica

Por movimiento giroscópico suele entenderse el movimiento de un sólido pesado con un punto fijo, cuyo elipsoide de inercia es de revolución respecto al punto fijo, el centro de masas está situado sobre el eje de revolución, y al que se comunica una rotación muy grande alrededor del eje OZ, para dejarlo libre a continuación.



Cuando el volante está girando alrededor de su eje de simetría, puesto que no existe ningún par gravitatorio neto con respecto a su centro de masa, el momento angular permanece constante. Esto es, el eje de rotación (*eje x* en la figura) mantiene una dirección constante en el espacio. Por tanto, el giróscopo puede utilizarse como estabilizador de dirección, ya que proporciona una dirección de referencia independiente de la del vehículo que lo transporte. Si desplazamos el giróscopo en el laboratorio observaremos que el eje de rotación *x* señala en la misma dirección.

Si el momento aplicado al giróscopo no es nulo, el momento angular no se mantendrá constante (y tampoco el eje de rotación *x*). Durante un tiempo infinitesimal dt el cambio del momento angular viene dado por

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

de modo que $d\vec{L}$ tiene la misma dirección del momento \vec{M} aplicado. Si el momento es perpendicular al momento angular, el cambio en $d\vec{L}$ es también perpendicular a \vec{L} , y el momento angular cambiará de dirección pero no de magnitud. El resultado es *la precesión del momento angular* alrededor de una dirección fija en el espacio.

Así, si cuando el volante se encuentra en rápida rotación colgamos un peso P del portapesas, a primera vista parece que el eje debiera inclinarse hacia el lado donde está el peso, sin embargo no ocurre así, sino que el giróscopo empieza a girar lenta y uniformemente en torno al eje vertical Z , con una velocidad angular de precesión Ω . En estas condiciones el momento aplicado se puede explicar en la forma:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \Omega \times \vec{L}$$

y el módulo del momento aplicado es

$$M = \Omega L$$

de donde

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{I \omega} = \frac{m g R}{4 \pi^2 I} \frac{1}{\omega} \quad [1]$$

siendo I es el momento de inercia del volante con respecto a su eje de rotación y ω es la velocidad del volante. La expresión anterior pone de manifiesto que cuanto mayor sea la velocidad angular de rotación del volante, menor será la velocidad angular de precesión.

El movimiento de precesión está producido por el peso del sólido en rotación, o sea por la fuerza mg aplicada en el centro de masas G y cuyo momento resultante respecto al punto fijo es un vector Γ_0 perpendicular al plano vertical que pasa por el centro de gravedad y por el eje OZ , plano que contiene al momento cinético L_0 . De aquí el fenómeno, aparentemente paradójico, llamado efecto giroscópico, de que el centro de gravedad del sólido se mueve perpendicularmente a la fuerza aplicada, es decir, en la dirección del movimiento y no en la de la fuerza como pudiera parecer a primera vista.

Operaciones y resultados obtenidos

Con el volante sin rotación, observar los movimientos que permite la suspensión. Comprobar que el volante está bien equilibrado, lo que permitirá orientar su eje en cualquier dirección del espacio.

Comunicar al giroscopio una rápida rotación y observar la estabilidad del movimiento y la constancia del momento angular.

Con el volante en rotación, intentar orientar su eje en cualquier dirección del espacio. Observar y explicar lo que ocurre.

Con el volante en rotación, añadir una pesa en el portapesas del equipo. Observar y explicar el movimiento de precesión.

Las frecuencias de precesión son tan bajas que pueden ser determinadas con un cronómetro, midiendo el tiempo que tarda en realizar un cuarto de giro ($\pi/2$ radianes) alrededor del eje Z . La frecuencia de rotación del disco giroscópico se determina con el contador de pulsos colocado en la posición de medida de semiperiodos –dos pasos por la barrera fotoeléctrica-. Para interrumpir el paso de luz por las barreras fotoeléctricas del contador se colocará un pequeño trozo de papel con adhesivo y, sujetando el eje x , se tomará el tiempo que tarda una vuelta.

El experimento numérico consiste en estudiar la precesión de un giróscopo simétrico, sin apoyo sobre el centro de gravedad. Para ello seguir los siguientes pasos:

- Colocar una masa en el portapesas (entre 20 y 50 g)
- Sujetar el giroscopio con una mano.
- Provocar un movimiento de rotación al volante del giroscopio.
- Medir la frecuencia de rotación como se ha descrito más arriba
- Medir la duración de un cuarto de revolución de precesión (el valor debe ser multiplicado por 4)

- Quitar la masa y medir inmediatamente la frecuencia de rotación de nuevo. El dato con el que se realizarán los cálculos posteriores será la media de las dos medidas efectuadas.
- Repetir las medidas para unas 10 velocidades distintas de rotación.
- Cuando se complete esta serie de medidas se realizará una nueva serie colocando una pesa de distinto valor (entre 50 y 100 g)

Medir las velocidades angulares de rotación del volante ω y de precesión Ω . Representar gráficamente los valores de Ω (eje Y) frente a los de $1/\omega$ (eje X). Ajustar los datos experimentales a una recta mediante el método de mínimos cuadrados. Esta recta se corresponderá a la ecuación (1), y por tanto de la pendiente de la recta se va a calcular el momento de inercia del giroscopio:

$$I = \frac{m g R}{4 \pi^2 \text{pendiente}}$$

siendo m la masa colocada en el portapesas (se pesará en balanza con al menos 2 decimales) y R el radio de eje del giroscopio (27 cm).

Comparar los momentos de inercia obtenidos con las dos masas.